

Pismeni dio ispita iz Matematike, 12.09.2011.

GRUPA A

1. Trojke vektora $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ i $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ čine bazu vektorskog prostora V_3 . Ako je $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{a}_2 = (2, 2, 1), \mathbf{a}_3 = (3, 3, 2), \mathbf{b}_1 = (1, 1, 2), \mathbf{b}_2 = (2, 3, -1), \mathbf{b}_3 = (-1, 0, 1)$, odrediti koordinate vektora $\mathbf{c} = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ u odnosu na bazu $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.
2. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}$.
3. Izračunati integral $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.
4. Naći uslovne ekstreme funkcije $z = \ln(xy)$, ako je $x^3 + xy + y^3 = 0$.

GRUPA B

1. Dokazati: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$ ($n \in \mathbb{N}, x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$).
2. Ispitati funkciju $y = \frac{ax+b}{(x^2+x+1)^2}$ i nacrtati joj grafik ako je $T(0,1)$ tačka ekstrema te funkcije.
3. Izračunati površinu figure u ravni koju određuju linije $x^2 + y^2 = 8$ i $y^2 = 7x$.
4. Riješiti diferencijalnu jednačinu $(x+4y)y' = 2x+3y-5$.

GRUPA C

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ :
$$\begin{aligned}4x + y &= 5 \\3x + 2y &= 5 \\6x + 2y + 2\lambda &= \lambda^2.\end{aligned}$$
2. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = \ln \frac{x^2}{2-x}$.
3. Izračunati integral $I = \int \frac{2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2}{2x^3 - 4x^2 + 3x - 1} dx$.
4. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y' - \operatorname{tg} y = \frac{e^x}{\cos y}$.

GRUPA D

1. Izračunati determinantu matrice X ako je $XA = 2X + A^8$, pri čemu je matrica $A = [a_{ij}]$ formata 2×2 zadana sa $a_{ij} = j - i + 1$.
2. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = x + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}$. Iskoristiti podatak da je jedina nula funkcije $x_0 \approx 0,4181$.
3. Izračunati integral $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$.
4. Naći stacionarne tačke funkcije $z = xy \sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{4}}, x^2 + y^2 \neq 0$.